**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Факультет прикладной математики и информатики

Исследование операций

Лабораторная работа №1

**Подготовил**

студент 3 курса 3 группы

Алексеенко Иван Юрьевич

**Преподаватель**

Исаченко А.Н.

**Задача №1:**

**Условие:**

Из четырех видов металла (медь, цинк, свинец, никель) составляют три вида сплавов: обычный, специальный и для художественного литья. Цены единицы веса металлов соответственно 0,8 у.е., 0,6 у.е., 0,4 у.е. и 1 у.е., а единицы веса сплава − 2 у.е.., 3 у.е. и 4 у.е.

Сплав для художественного литья должен содержать не менее 6% никеля, не менее 50% меди и не более 30% свинца, специальный – не менее 4% никеля, не менее 70% меди, не менее 10% цинка и не более 20% свинца. В обычный сплав металлы входят без ограничений.

Производственная мощность предприятия позволяет выпускать не более 400 единиц веса обычного сплава, не более 700 единиц специального сплава и не более 100 единиц сплава для художественного литья.

Найти план, приносящий максимальную прибыль.

**Решение:**

Введём следующие обозначения для металлов: медь – 1, цинк – 2, свинец – 3, никель – 4; для сплавов: обычный – 1, специальный – 2, для художественного литья – 3.

Пусть – количество единиц ­i-го металла в -ом сплаве,, , .

Тогда целевая функция имеет вид

Основные ограничения имеют вид

**Задача №2:**

**Условие:**

Для производства чугунного литья используется  различных шихтовых материалов (чугун, лом, форрофосфор и т.д.). Химический состав чугунного литья определяется содержанием в нем  химических элементов (кремний, марганец, фосфор и т.д.). Готовый чугун должен иметь строго определенный химический состав, задаваемый величинами  – процент содержания -го химического элемента. Заданы также цены  за единицу -го шихтового материала.

Найти наиболее дешевый состав шихты.

**Решение:**

Пусть — количество единиц шихтового материала, которое будет использовано для производства чугунного литья, ;

— процентное содержание -го химического элемента в -ом шихтовом материале;

.

Тогда целевая функция имеет вид

.

Основные ограничения имеют вид

.

**Задача №5:**

**Условие:**

Авиапредприятию необходимо решить, какое количество топлива следует закупить у трех поставщиков, если имеют место следующие ограничения:

а) заправка самолетов осуществляется в четырех аэропортах;

б) нефтяные заводы имеют следующие возможности поставок: 2,5 млн.л., 5 млн.л., 6 млн. л.;

в) распределение топлива по аэропортам осуществляется в следующих количествах: 1 млн. л., 2 млн. л., 3 млн. л., 4 млн. л.

Составить модель оптимального прикрепления поставщиков, если стоимость доставки 1 л топлива задается следующей таблицей:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 12 | 9 | 10 |
| 2 | 10 | 11 | 14 |
| 3 | 8 | 11 | 13 |
| 4 | 11 | 13 | 9 |

**Решение:**

Пусть — количество литров топлива, которое поставляется с -го завода в -ый аэропорт, — дробные;

— стоимость доставки литра топлива в аэропорт с завода ;

.

Целевая функция имеет вид

Основные ограничения имеют вид

млн.л.

млн.л.

млн.л.

млн.л.

млн.л.

млн.л.

млн.л.

**Задача №8:**

**Условие:**

Пусть площадь, отведенная для выращивания сельскохозяйственных культур, состоит из  земельных участков На этих участках выращивается  сельскохозяйственных культур (). Причём на участке выращивается только одна культура.

Затраты по возделыванию -й культуры на -м участке выражаются числом , причем возможны дополнительные расходы *cij.*

На каждом из участков можно применять удобрение только одного из *z* типов. Дополнительные расходы при использовании *k*-го удобрения на -м участке в случае посадки -й культуры равны . Наконец, каждый из участков можно орошать. Стоимость орошения -го участка равна *qi*  и не зависит от культуры.

Заданы:  – урожай -й культуры на -м участке с *k*-м удобрением без дополнительных затрат и без орошения;

 – то же с орошением без дополнительных затрат;

 – то же с дополнительными затратами без орошения;

 – то же с дополнительными затратами и с орошением.

Пусть также  – заданный средний суммарный урожай -й культуры, а заданный объем соответствующей продукции - . Распределить культуры по участкам с целью минимизации суммарных затрат.

**Решение:**

Пусть – переменная, означающая, выращивается ли -ая культура на -ом участке, ;

– переменная, означающая, есть ли дополнительные расходы стоимостью на -ом участке, ;

– переменная, означающая, есть ли орошение стоимостью на -ом участке, ;

– переменная, означающая, используется ли -ое удобрение стоимостью на -ом участке, ;

*.*

Целевая функция имеет вид

Основные ограничения имеют вид

**Задача №9:**

**Условие:**

Сельхозпредприятие имеется несколько земельных участков, качественно отличающихся друг от друга. Хозяйство возделывает несколько видов культур.

Необходимо определить, какую площадь каждого участка следует отвести под каждую культуру, чтобы получить запланированные объемы продукции при минимальных затратах.

Решить задачу, используя числовые данные, представленные в следующей таблице:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Земля | Площадь (га) | Культуры | Урожайность (ц/га) | Трудоемкость (дни/га) |
| Лучшая | 100 | пшеница  рожь  овес | 30  25  28 | 10  8  7 |
| обыкновенная | 200 | пшеница  рожь  овес | 20  20  26 | 10  8  7 |
| худшая | неограни-  чена | пшеница  рожь  овес | 15  15  25 | 10  8  7 |

Плановые задания: пшеница – 5000 ц, рожь – 3500 ц, овес – 5000 ц.

**Решение:**

Введём следующие обозначения для видов земли: лучшая – 1, обыкновенная – 2, худшая – 3; для культур: пшеница – 1, рожь – 2, овес – 3.

Пусть – площадь, занимаемая -ой культурой на -ом типе земли, ;

– трудоёмкость для -ой культуры;

.

Целевая функция имеет вид

Основные ограничения имеют вид

**Задача №11:**

**Условие:**

В мастерской имеется 4 станка, которые могут выполнять 3 операции. Каждую операцию единовременно может выполнять только один станок, и каждый станок можно загрузить выполнением только одной операции.

Матрица затрат времени при выполнении -станком -й операции имеет вид:



Определить наиболее рациональное распределение операций между станками, минимизирующее суммарные затраты времени.

**Решение:**

Пусть – количество часов, потраченных i-ым станком на выполнение операции, ;

– время, необходимое -му станку для выполнения -ой операции;

– переменная, означающая, выполняется ли -ым станком -ая операция, ;

.

Целевая функция имеет вид

Основные ограничения имеют вид

**Задача №12:**

**Условие:**

В различных концах города находятся пять автохозяйств, которые должны выделить по одному грузовику и послать в пять различных сельхозпредприятий за овощами, поставляемыми пяти овощным базам.

Известно время, затрачиваемое автомобилями на дорогу до каждого предприятия, время, время на доставку их на базы и время, необходимое для погрузки овощей. Эти данные приведены в следующих таблицах:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | сельхозпредприятия | | | | |
| Машины | A | B | C | D | E |
| I | 3 | 1 | 5 | 2 | 4 |
| II | 4 | 6 | 3 | 1 | 3 |
| III | 2 | 4 | 2 | 3 | 6 |
| IV | 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| V | 1 | 7 | 3 | 2 | 5 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Базы | | | | | | | | |
| пред-тия | A | b | | c | | d | | e | |
| A | 4 | 6 | | 1 | | 2 | | 5 | |
| B | 2 | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | |
| C | 1 | 5 | | 3 | | 4 | | 2 | |
| D | 2 | 4 | | 5 | | 6 | | 3 | |
| E | 5 | 2 | | 1 | | 3 | | 4 | |
| Сельхозпредприятия | | | A | | B | | C | | D | | E |
| время погрузки | | | 2 | | 4 | | 3 | | 2 | | 1 |

Требуется так организовать распределение транспорта, чтобы минимизировать затраты времени, связанные с его эксплуатацией.

**Решение:**

Пусть – переменная, означающая, отправлен ли грузовик из -го автохозяйства в -ое сельхозпредприятие, ;

– время, необходимое -му грузовику, чтобы добраться на -ое предприятие; – время, необходимое для доставки на базу -го грузовика на -ое предприятие;

– время погрузки для -го предприятия;

.

Целевая функция имеет вид

Основные ограничения имеют вид

**Задача №13:**

**Условие:**

Самолеты авиакомпании совершают рейсы между двумя городами  и  в обоих направлениях.

Если база экипажа находится в  (*B*) и экипаж прибывает в  (*A*) определенным рейсом, то он должен вернуться в  (*B*) одним из рейсом (возможно, на следующий день). Между полетами у экипажа должен быть отдых не менее часа.

Компания стремится выбрать обратный рейс так, чтобы минимизировать время нахождения экипажа в аэропорту, который не является базой экипажа.

При заданном расписании полетов требуется решить:

* 1. какие рейсы спарить (спаренный рейс – рейс в оба конца, выполняемый одним и тем же экипажем)?
  2. где выбрать базу при заданных спаренных рейсах?

Расписание рейсов

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Рейс | Вылет из А | Прибытие в В | Рейс | Вылет из В | Прибытие в А |
| 1 | 7.30 | 9.00 | 2 | 7.00 | 10.00 |
| 3 | 8.15 | 9.15 | 4 | 7.45 | 10.45 |
| 5 | 14.00 | 15.30 | 6 | 11.00 | 14.00 |
| 7 | 17.45 | 19.15 | 8 | 18.00 | 21.00 |
| 9 | 19.00 | 20.30 | 10 | 19.30 | 22.30 |

**Решение:**

Пусть – переменная, означающая, возможен ли спаренный рейс из в и обратно (или наоборот), ;

– количество часов отдыха в спаренном рейсе , ;

.

Целевая функция имеет вид:

Основные ограничения имеют вид:

,

**Задача №14:**

**Условие:**

Из пункта в пункт  и обратно отправляются четыре поезда, согласно расписанию:

из в – 9.00, 12.00, 16.00, 20.00;

из в – 10.00, 15.00, 18.00, 22.00.

Время в пути для всех поездов одинаково и равно шести часам. Локомотивы, ведущие поезда, совершают в сутки два рейса: один из пункта, к которому локомотив прикреплен, и второй обратно с ближайшим очередным рейсом.

Найти оптимальное закрепление локомотивов за пунктами и , при котором достигается минимум суммарного времени простоя локомотивов.

**Решение:**

Введём следующие обозначения для времени отправления из пункта : в 9 часов – 1, в 12 – 2, в 16 – 3, в 20 – 4; из пункта : в 10 часов – 1, в 15 – 2, в 18 – 3, в 22 – 4.

Пусть – переменная, означающая, существует ли маршрут , ;

– количество часов простоя локомотива на маршруте ;

*.*

Целевая функция имеет вид:

Основные ограничения имеют вид

, значит, что отправление из пункта во время, соответствующее (согласно введённым выше обозначениям)

**Задача №15:**

**Условие:**

Банк предоставляет набор услуг по кредитованию. Возможные типы банковских кредитов приведены в таблице. Безнадёжные долги считаются невозвратимыми, поэтому они должны вычитаться из возможного дохода.

Конкурентная борьба вынуждает банк не менее 40% портфеля кредитов помещать в сельскохозяйственные и коммерческие кредиты. Для содействия строительной индустрии банк планирует вложить в кредиты на покупку жилья не меньше, чем общая сумма кредитов физическим лицам и на покупку автомобилей. Банк поддерживает государственную политику, указывающую, что отношение безнадёжных долгов ко всей сумме кредитов не должно превышать 0,04.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Тип кредита | Ставка процента | Вероятность безнадёжных долгов |
| Кредиты физическим лицам | 0,14 | 0,1 |
| Кредиты на покупку автомобилей | 0,13 | 0,07 |
| Кредиты на покупку жилья | 0,12 | 0,03 |
| Сельскохозяйственные | 0,125 | 0,05 |
| Коммерческие | 0,1 | 0,02 |

Сформировать портфель кредитов объёмом 12 млн. долларов, для получения максимальной чистой прибыли.

**Решение:**

Пусть  *−* сумма в миллионах долларов -го кредита;

– разность процентной ставки и вероятности безнадежных долгов *i*-го типа кредита;

.

Целевая функция имеет вид

Основные ограничения имеют вид

**Задача №16:**

**Условие:**

Планируя расходы на обучение ребёнка, семейная пара решила ежегодно откладывать определённые суммы в течение 10 лет, начиная с 8-летнего возраста ребёнка. По годам эти суммы запланированы следующим образом:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Сумма  (долл.) | 2000 | 2000 | 2500 | 2500 | 3000 | 3500 | 3500 | 4000 | 4000 | 5000 |

Семейная пара решила вложить деньги в: 1) страховой полис с 7,5% годовых; 2) шестилетние ценные бумаги с 7,9% годовых (текущая рыночная стоимость ценных бумаг равна 98% номинальной стоимости); 3) девятилетние ценные бумаги с доходностью 8,5% годовых (их текущая рыночная стоимость равна 1,02 от номинальной стоимости).

Определить оптимальный план вложения денег и ежегодные доходы.

**Решение:**

Пусть – прибыль от вложения в страховой полис с 7,5%;

– прибыль от вложения в шестилетние бумаги с 7,9% годовых (текущая рыночная стоимость ценных бумаг равна 98% номинальной стоимости);

– прибыль от вложения в девятилетние ценные бумаги с доходностью 8,5% годовых (их текущая рыночная стоимость равна 1,02 от номинальной стоимости);

– сумма вклада в i-ом году;

– год, в котором деньги были вложены в соответствующие вклады;

;

;

;

Целевая функция имеет вид

Основные ограничения имеют вид

**Задача №17:**

**Условие:**

Фирма собирает персональные компьютеры для заказчиков. На год, поквартально имеются заказы на 400, 700, 500 и 200 компьютеров соответственно. Фирма может собирать больше компьютеров, чем указано в заказах, но в таком случае приходится платить 100 у.е. за хранение собранного компьютера в течение квартала. Увеличение производства в следующем квартале, по сравнению с предыдущим, приводит к необходимости набора дополнительных работников, что повышает себестоимость компьютера на 60 у.е. При уменьшении производства в следующем квартале, по сравнению с предыдущим, необходимо сокращать персонал, что также увеличивает себестоимость компьютера на 50 у.е.

Как организовать сборку компьютеров с наименьшими издержками, чтобы удовлетворить все заказы?

**Решение:**

Обозначим – число производимых компьютеров за i-й квартал. Тогда имеем ограничения:

400

400 + 700 = 1100

400 + 700 + 500 = 1600

Введем переменные такие, что:

Тогда имеем функцию издержек:

Получим математическую модель этой задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |